

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ БАРОТРОПНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СЖИМАЕМЫХ ВЯЗКИХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Владимир Александрович Макаров¹

Дмитрий Алексеевич Прокудин²

^{1,2}Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия,

¹v.makarov2@g.nsu.ru

²d.prokudin@g.nsu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3833-0390>

Аннотация

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для одномерной модели баротропной динамики сжимаемых вязких многокомпонентных сред, описываемой системой уравнений, представляющих собой обобщение уравнений Навье-Стокса. В отличие от уравнений Навье-Стокса, где вязкость является скалярной величиной, в многокомпонентном случае вязкости образуют матрицу вязкостей, отражающую составную структуру тензоров вязких напряжений. Это приводит к присутствию в исследуемых уравнениях старших производных от скоростей всех компонент, что существенно усложняет математический анализ. Диагональные элементы матрицы вязкостей отвечают за вязкое трение внутри каждой компоненты, тогда как недиагональные элементы отвечают за межкомпонентное вязкое взаимодействие. Такая структура исключает возможность непосредственного переноса существующих теоретических результатов, полученных для уравнений Навье-Стокса, на многокомпонентные модели. В случае диагональной матрицы вязкостей компоненты связаны лишь через младшие члены, что значительно упрощает ситуацию. Настоящее исследование посвящено обоснованию существования и единственности решения начально-краевой задачи для одномерных баротропных уравнений динамики сжимаемых вязких многокомпонентных сред в более общем случае, когда матрица вязкостей обладает недиагональной структурой.

Ключевые слова и фразы

начально-краевая задача, теорема существования и единственности, баротропная сжимаемая вязкая многокомпонентная среда

Источник финансирования

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации

Для цитирования

Макаров В. А., Прокудин Д. А. Однозначная разрешимость начально-краевой задачи для одномерных баротропных уравнений динамики сжимаемых вязких многокомпонентных сред // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 3, С. 192-225. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-192-225

Unique solvability of the initial-boundary value problem for one-dimensional barotropic equations of dynamics of compressible viscous multicomponent media

Vladimir A. Makarov¹, Dmitrii A. Prokudin²,

^{1,2}Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

¹v.makarov2@g.nsu.ru

²d.prokudin@g.nsu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3833-0390>

Abstract

In the present paper, we consider the initial-boundary value problem for a one-dimensional model of barotropic dynamics of compressible viscous multicomponent media, described by a system of equations that generalizes the Navier-Stokes equations. Unlike the Navier-Stokes equations, where viscosity is a scalar quantity, in the multicomponent case the viscosities form a viscosity matrix reflecting the composite structure of the viscous stress tensors. This leads to the presence of higher-order derivatives of the velocities of all components in the equations under study, which substantially complicates the mathematical analysis. The diagonal entries of the viscosity matrix account for the viscous friction inside each component, while the off-diagonal entries account for the intercomponent viscous interaction.

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 3, С. 192-225
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 3, P. 192-225

In the case of a diagonal viscosity matrix, the components are coupled only through lower-order terms, which simplifies the situation significantly. The present study is devoted to establishing the existence and uniqueness of a solution to the initial-boundary value problem for one-dimensional barotropic equations of dynamics of compressible viscous multicomponent media in the more general case where the viscosity matrix has a non-diagonal structure.

Keywords

initial-boundary value problem, existence and uniqueness theorem, barotropic compressible viscous multicomponent medium

Funding

The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under agreement No. 075-15-2025-349 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation

For citation

Makarov V. A., Prokudin D. A., Unique solvability of the initial-boundary value problem for one-dimensional barotropic equations of dynamics of compressible viscous multicomponent media // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 3, P. 192-225. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-192-225

§ 1. Введение и постановка задачи

В замкнутой области $\overline{Q}_T = [0, T] \times [0, 1]$, $T = \text{const} > 0$ требуется определить плотность $\rho(t, x) > 0$ многокомпонентной среды и скорости $u_i(t, x)$ для каждой компоненты с номером $i = 1, \dots, N$, которые удовлетворяют следующей системе уравнений, начальных и краевых условий [1]-[3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + v \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.4)$$

Здесь $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$ — средневзвешенная скорость, $\alpha_j = \text{const} > 0$,

$\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$; $P(\rho)$ — давление, которое определяется плотностью ρ , причем

$P \in C^1(0, \infty)$, $P > 0$ и $P' > 0$; $\rho_0(x)$, $u_{0i}(x)$ — известные функции начальных данных; коэффициенты вязкостей ν_{ij} образуют симметричную положительно определенную матрицу $\mathbf{N}$, то есть $\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq C_1(\mathbf{N}) \sum_{i=1}^N \lambda_i^2$ для любых $\lambda_i \in \mathbb{R}$ с некоторой положительной постоянной C_1 (без ограничения общности будем считать, что $C_1 < 1$).

Система (1.1), (1.2) представляет собой обобщение одномерной системы уравнений Навье-Стокса для однокомпонентной среды на случай многокомпонентной смеси. Ее характерной особенностью является присутствие производных второго порядка от скоростей всех компонент в уравнениях (1.2). В отличие от уравнений Навье-Стокса, где вязкость является скаляром, в многокомпонентной среде коэффициенты вязкостей ν_{ij} образуют матрицу вязкостей $\mathbf{N}$, отражающую составную структуру тензоров вязких напряжений [1]–[8]. Диагональные элементы матрицы вязкостей отвечают за вязкое трение внутри каждой компоненты, тогда как недиагональные элементы отвечают за межкомпонентное вязкое взаимодействие. В случае диагональной матрицы вязкостей компоненты связаны только через младшие члены, что существенно упрощает анализ. Однако в общем случае, рассматриваемом в данной работе, такая структура не позволяет напрямую переносить существующие теоретические результаты, полученные для уравнений Навье-Стокса [9]–[17] на многокомпонентные модели. Целью работы является доказательство существования и единственности решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) без каких-либо упрощающих предположений о структуре $\mathbf{N}$, кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определенности. Вопросы однозначной разрешимости для уравнений (1.1), (1.2) в частном случае $P(\rho) = K\rho^\gamma$, $K = \text{const} > 0$, $\gamma = \text{const} \geq 1$ изучались в работах [18]–[20], для родственных моделей многокомпонентных сред — в работах [21]–[27].

Определение 1.1. *Сильным решением* задачи (1.1)–(1.4) будем называть совокупность функций $(\rho, u_1, \dots, u_N)$, таких что для всех $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \rho > 0, \quad \rho &\in L^\infty(0, T; W^{1,2}(0, 1)), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), \\ u_i &\in L^\infty(0, T; W^{1,2}(0, 1)) \cap L^2(0, T; W^{2,2}(0, 1)), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L^2(Q_T), \end{aligned} \quad (1.5)$$

уравнения (1.1), (1.2) выполнены почти всюду в Q_T , начальные условия (1.3) — для почти всех $x \in (0, 1)$, а краевые условия (1.4) — для почти всех $t \in (0, T)$.

Теорема 1.1. Пусть начальные данные удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \rho_0 &\in W^{1,2}(0,1), \quad \rho_0 > 0, \\ u_{0i} &\in W^{1,2}(0,1), \quad u_{0i}|_{x=0} = u_{0i}|_{x=1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (1.1)-(1.4).

Доказательство теоремы 1.1 будет проведено в параграфах 2-6. В параграфе 2 обосновывается разрешимость приближенной начально-краевой задачи, полученной из (1.1)-(1.4) применением метода Галеркина. В параграфе 3 устанавливаются равномерные оценки галеркинских приближений, на основании которых в параграфе 4 осуществляется соответствующий предельный переход, тем самым обосновывая локальное по времени существование решения задачи (1.1)-(1.4). В параграфе 5 выводятся априорные оценки, зависящие лишь от входных данных задачи, из которых, с учетом локальной разрешимости, непосредственно вытекает существование сильного решения задачи (1.1)-(1.4). Параграф 6 посвящен обоснованию единственности данного решения и завершает доказательство теоремы 1.1.

§ 2. Построение галеркинских приближений начально-краевой задачи

Рассмотрим вспомогательную задачу с неизвестными $\rho^n(t, x)$ и $\sigma_{is}^n(t)$, $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial \rho^n}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^n v^n)}{\partial x} = 0, \quad v^n = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j^n, \quad (2.1)$$

$$\int_0^1 \left(\rho^n \frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \rho^n v^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial P(\rho^n)}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j^n}{\partial x^2} \right) \sin(\pi s x) dx = 0, \quad (2.2)$$

$$\rho^n|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u_i^n|_{t=0} = \sum_{k=1}^n \sigma_{0ik}^n \sin(\pi k x), \quad (2.3)$$

где $u_i^n = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}^n(t) \sin(\pi k x)$, $\sigma_{0is}^n = \sigma_{is}^n(0) = 2 \int_0^1 u_{0i}(x) \sin(\pi s x) dx$, полученную из (1.1)-(1.4) применением метода Галеркина.

Лемма 2.1. В условиях теоремы 1.1 существует $t^n \in (0, T)$ и набор

$$\begin{aligned} \rho^n &> 0, \quad \rho^n \in L^\infty(0, t^n; W^{1,2}(0,1)) \cap W^{1,\infty}(0, t^n; L^2(0,1)), \\ \sigma_{is}^n &\in C^1[0, t^n], \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.4)$$

являющийся решением приближенной задачи (2.1)-(2.3) в области $Q_{t^n} = (0, t^n) \times (0, 1)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно $t^n \in (0, T)$. В дальнейшем, для удобства записи, согласимся опускать индексы n для галеркинских приближений до конца параграфа 3. Пусть также выражения $C_i(\cdot)$, $i \in \mathbb{N}$ обозначают положительные постоянные, зависящие от перечисленных в скобках параметров. Определим множество

$$V = \left\{ \sigma \in (C[0, t^n])^{nN} : \sigma(0) = \sigma_0, \|\sigma\|_{(C[0, t^n])^{nN}} \leq c \right\},$$

где $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$, $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{in})$, $\sigma_0 = (\sigma_{01}, \dots, \sigma_{0N})$, $\sigma_{0i} = (\sigma_{0i1}, \dots, \sigma_{0in})$,

$$c^2 = \left(\left(\inf_{x \in [0, 1]} \rho_0 \right)^{-1} + \sup_{x \in [0, 1]} \rho_0 \right)^2 e^2 N n \|\sigma_0\|_{\mathbb{R}^{nN}}^2 + 1.$$

Построим оператор $\Lambda : V \rightarrow (C[0, t^n])^{nN}$ по правилу $\Lambda(\sigma) = \theta$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, $\theta_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{in})$, $i = 1, \dots, N$, где θ определяется следующим способом. Сначала найдем функцию

$$\rho > 0, \quad \rho \in L^\infty(0, t^n; W^{1,2}(0, 1)) \cap W^{1,\infty}(0, t^n; L^2(0, 1))$$

как решение задачи Коши (2.1), (2.3), где $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$,

$u_j = \sum_{k=1}^n \sigma_{jk}(t) \sin(\pi kx)$ (см. [28]). Далее, определим θ как решение следующей задачи Коши для системы nN линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\int_0^1 \left(\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho v \frac{\partial U_i}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} \right) \sin(\pi s x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

$$\theta(0) = \sigma_0, \quad (2.6)$$

где $U_i = \sum_{k=1}^n \theta_{ik}(t) \sin(\pi kx)$, $i = 1, \dots, N$. Покажем корректность такого

определения. Сначала заметим, что т. к.

$$\begin{aligned} \left(\inf_{x \in [0,1]} \rho_0 \right) \exp \left\{ - \int_0^t \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| d\tau \right\} &\leq \rho(t, x) \\ &\leq \left(\sup_{x \in [0,1]} \rho_0 \right) \exp \left\{ \int_0^t \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

то, в силу включения $\sigma \in V$, выбирая $t^n \leq (\pi n^2 N c)^{-1}$, получаем оценку

$$C_2^{-1} \leq \rho(t, x) \leq C_2, \quad \text{где} \quad C_2 = \left(\left(\inf_{x \in [0,1]} \rho_0 \right)^{-1} + \sup_{x \in [0,1]} \rho_0 \right) e. \quad (2.8)$$

Далее, представим систему (2.5) в матричном виде

$$\mathbf{A}(t) \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} + \mathbf{B}(t)\boldsymbol{\theta} + \mathbf{C}(t) = 0.$$

Несложно проверить, что матрицы $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ и вектор $\mathbf{C}(t)$ здесь состоят из непрерывных по t функций. Более того, матрица $\mathbf{A}(t)$ имеет блочно-диагональный вид:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A(t) \end{pmatrix},$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} \int_0^1 \rho \sin(\pi x) \sin(\pi x) dx & \dots & \int_0^1 \rho \sin(\pi x) \sin(\pi n x) dx \\ \vdots & & \vdots \\ & \ddots & \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 \rho \sin(\pi x) \sin(\pi n x) dx & \dots & \int_0^1 \rho \sin(\pi n x) \sin(\pi n x) dx \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\det \mathbf{A}(t) = (\det A(t))^N$, где $A(t)$ — матрица Грама линейно-независимого набора синусов со скалярным произведением имеющим вес ρ . Учитывая (2.8), определитель $\det A(t)$ положителен и отделен от нуля, поэтому, $\mathbf{A}^{-1}(t)$ определена и непрерывна. Поскольку система (2.5) может

быть разрешена относительно производной, задача Коши (2.5)-(2.6) имеет решение $\theta(t) \in (C^1[0, t^n])^{nN}$, что обосновывает корректность данного построения.

Заметим, что наличие неподвижной точки оператора Λ равносильно разрешимости задачи (2.1)-(2.3). Покажем, что при достаточно малом t^n оператор удовлетворяет условиям теоремы Шаудера о неподвижной точке (см., [10], с. 39), а именно: 1) V — выпуклое замкнутое ограниченное множество; 2) $\Lambda : V \rightarrow V$; 3) Λ — вполне непрерывный оператор.

В нашем случае условие 1) выполнено автоматически. Докажем включение $\Lambda(V) \subset V$. Умножим уравнение (2.5) на $\theta_{is}(t)$ и просуммируем по $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho U_i^2 dx \right) + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_j}{\partial x} dx \\ &= - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} U_i dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В силу положительной определенности $\mathbf{N}$, неравенства Коши и оценки (2.8), имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_j}{\partial x} dx \geq C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx, \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} U_i dx \leq \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{N}{2C_1} \left(P(C_2) \right)^2, \end{aligned}$$

откуда, с учетом (2.9), получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho U_i^2 dx \right) + C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq \frac{N}{C_1} \left(P(C_2) \right)^2.$$

Поэтому, справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho U_i^2 dx \leq \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_0 U_{0i}^2 dx + \frac{Nt^n}{C_1} \left(P(C_2) \right)^2,$$

из которой, с учетом (2.8) и очевидных равенств

$$\int_0^1 U_i^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^2, \quad \int_0^1 U_{0i}^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_{0ik}^2,$$

следует неравенство

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^2 \leq C_2^2 \|\sigma_0\|_{\mathbb{R}^{nN}}^2 + \frac{2C_2 t^n N}{C_1} \left(P(C_2) \right)^2.$$

Таким образом, выбирая $t^n = \min \left\{ T, 1/\pi n^2 N c, C_1/2C_2 n N^2 \left(P(C_2) \right)^2 \right\}$, получим нужную оценку

$$\|\theta\|_{(C[0,t^n])^{nN}} \leq c, \quad (2.10)$$

которая, вместе с (2.6), обосновывает включение $\theta \in V$, то есть $\Lambda(V) \subset V$.

Установим теперь компактность оператора Λ . Умножим (2.5) на $\theta'_{is}(t)$ и просуммируем по $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx &= - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial t} dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial t} dx \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \int_0^1 \nu_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} \frac{\partial U_i}{\partial t} dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (2.11) отдельно. В силу оценки (2.10), имеем неравенства

$$v^2 \leq n^2 c^2 N^2, \quad \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 \leq \pi^2 c^2 n^4,$$

с помощью которых и неравенства Коши, установим

$$- \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial t} dx \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_3(C_2, N, c, n). \quad (2.12)$$

Далее, интегрируя по частям и применяя неравенство Коши, получим

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial t} dx &\leq \frac{1}{6\pi^2 n^2 C_2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \\ &+ \frac{3\pi^2 n^2 C_2 N}{2} \left(P(C_2) \right)^2, \end{aligned}$$

откуда и из оценки

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \leq \pi^2 n^2 C_2 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx,$$

следует, что

$$-\sum_{i=1}^N \int_0^1 \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial t} dx \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_4(C_2, P(C_2), N, n). \quad (2.13)$$

Наконец, применяя неравенство Коши и (2.10), несложно получить

$$\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} \frac{\partial U_i}{\partial t} dx \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_5(C_2, \mathbf{N}, N, c, n). \quad (2.14)$$

В итоге, из (2.11), привлекая (2.12)–(2.14), приходим к оценке

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx \leq C_6(C_2, C_3, C_4, C_5). \quad (2.15)$$

Но тогда, с учетом (2.10) и (2.15), получаем оценку на $\|\boldsymbol{\theta}\|_{(W^{1,2}(0,t^n))^{nN}}$, т. е. ограниченность множества $\mathbf{\Lambda}(V)$ в пространстве $(W^{1,2}(0,t^n))^{nN}$, откуда, используя известное компактное вложение $W^{1,2}(0,t^n) \hookrightarrow C[0,t^n]$, устанавливается относительная компактность множества $\mathbf{\Lambda}(V)$ в $(C[0,t^n])^{nN}$. Таким образом, оператор $\mathbf{\Lambda}$ компактен, и остается обосновать лишь его непрерывность.

Пусть $\rho \in L^\infty(0,t^n; W^{1,2}(0,1)) \cap W^{1,\infty}(0,t^n; L^2(0,1))$ — решение подзадачи (2.1) и (2.3) для некоторого $\boldsymbol{\sigma} \in V$. Продифференцируем первое уравнение в (2.1) по x , умножим на $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, проинтегрируем по x и воспользуемся интегрированием по частям, получим, что

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx = -3 \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^1 \rho^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} dx,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx &\leq \int_0^1 (\rho'_0)^2 dx + 3 \int_0^t \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \rho^2 \left| \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right| dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.16)$$

С учетом (2.8) и $\boldsymbol{\sigma} \in V$, из (2.16) и неравенства Гронвуолла следует оценка

$$\left\| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\|_{L^2(0,1)} \leq C_7 \left(C_2, \|\rho'_0\|_{L^2(0,1)}, N, c, n, t^n \right). \quad (2.17)$$

Обратим внимание на то, что вывод оценки (2.17) требует более высокой гладкости от ρ , чем гарантируется начальными данными. Тем не менее, оценка (2.17) не требует таких дополнительных предположений о гладкости. Это говорит о том, что данная оценка может быть получена из оценки для сглаженной ρ^ε , построенной по сглаженным начальным данным ρ_0^ε , путем предельного перехода по параметру $\varepsilon > 0$. Действительно, пусть $\rho^\varepsilon \in L^\infty(0, t^{\varepsilon, n}; W^{2,2}(0, 1)) \cap W^{1,\infty}(0, t^{\varepsilon, n}; W^{1,2}(0, 1))$ — решение (2.1) с начальными данными

$$\rho^\varepsilon|_{t=0} = \rho_0^\varepsilon \in W^{2,2}(0, 1), \quad \|\rho_0 - \rho_0^\varepsilon\|_{W^{1,2}(0,1)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

С учетом сходимости $\|\rho_0 - \rho_0^\varepsilon\|_{W^{1,2}(0,1)} \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\inf_{x \in [0,1]} \rho_0 \right) &\leq \left(\inf_{x \in [0,1]} \rho_0^\varepsilon \right) \leq 2 \left(\inf_{x \in [0,1]} \rho_0 \right), \\ \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in [0,1]} \rho_0 \right) &\leq \left(\sup_{x \in [0,1]} \rho_0^\varepsilon \right) \leq 2 \left(\sup_{x \in [0,1]} \rho_0 \right), \\ \frac{1}{2} \|\rho_0'\|_{L^2(0,1)} &\leq \|\rho_0^{\varepsilon'}\|_{L^2(0,1)} \leq 2 \|\rho_0'\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

и поэтому (переобозначая все ранее введенные константы, при необходимости), справедливы равномерные оценки для $t \in (0, t^n) \subset (0, t^{\varepsilon, n})$:

$$C_2^{-1} \leq \rho^\varepsilon \leq C_2, \quad \left\| \frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial x} \right\|_{L^2(0,1)} \leq C_7. \quad (2.18)$$

Из ограниченности ρ^ε в $L^\infty(Q_{t^n})$ и $\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial x}$ в $L^\infty(0, t^n; L^2(0, 1))$, имеем (переходя к подпоследовательности, при необходимости) сходимости при $\varepsilon \rightarrow 0+$:

$$\rho^\varepsilon \rightarrow \bar{\rho} \quad * \text{ — слабо в } L^\infty(Q_{t^n}), \quad \frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \quad * \text{ — слабо в } L^\infty(0, t^n; L^2(0, 1)).$$

Привлекая первое уравнение в (2.1) и оценки (2.18), имеем равномерную по ε ограниченность $\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t}$ в $L^\infty(0, t^n; L^2(0, 1))$, откуда следует как сходимость

$$\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \quad * \text{ — слабо в } L^\infty(0, t^n; L^2(0, 1)),$$

так и, по теореме Асколи-Арцела (см., [29], с. 58), сходимость

$$\rho^\varepsilon \rightarrow \bar{\rho} \text{ сильно в } C([0, t^n]; L^2(0, 1)),$$

из которой, в свою очередь, следует, что

$$\bar{\rho}|_{t=0} = \rho_0 \text{ почти всюду в } L^2(0, 1).$$

Таким образом, $\bar{\rho}$ есть решение подзадачи (2.1) и (2.3), т. е. $\bar{\rho} = \rho$ и оценка (2.17) справедлива без дополнительных требований на гладкость начальных данных. В дальнейшем, любые оценки полученные повышением гладкости при их выводе следует понимать таким способом.

$$\text{Пусть } \sigma^{(1,2)} \in V, \theta^{(1,2)} = \Lambda(\sigma^{(1,2)}), u_i^{(1,2)} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}^{(1,2)} \sin(\pi kx),$$

$$U_i^{(1,2)} = \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^{(1,2)} \sin(\pi kx), i = 1, \dots, N, \rho^{(1,2)} - \text{решения задач Коши (2.1),}$$

$$(2.3), \text{ где вместо } v \text{ стоят } v^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j^{(1,2)} \text{ соответственно. Обозначим}$$

$$u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}, U_i = U_i^{(1)} - U_i^{(2)}, i = 1, \dots, N, v = v^{(1)} - v^{(2)}, \rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}.$$

Из (2.1) и (2.3) для величин $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ следуют соотношения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^{(2)} v) = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0. \quad (2.19)$$

Умножим (2.19) на ρ и проинтегрируем по x , получим равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho^2 dx = - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \rho^{(2)} \rho \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \rho v \right) dx,$$

откуда и из неравенства Коши, следует соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho^2 dx &\leq \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right| \int_0^1 \rho^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + (C_2^2 + 1) \int_0^1 \rho^2 dx \\ &+ \left(\sup_{x \in [0,1]} |v| \right)^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Используя неравенства

$$\left(\sup_{x \in (0,1)} |v| \right)^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx, \quad \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 \leq N \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2,$$

с учетом (2.8), (2.17) и начальных данных в (2.19), получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho^2 dx &\leq \int_0^t (cN\pi n^2 + C_2^2 + 1) \left(\int_0^1 \rho^2 dx \right) d\tau \\ &+ \int_0^t N(C_7^2 + 1) \left(\sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \right) d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому, с помощью неравенства

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq \pi^2 n^2 \int_0^1 u_i^2 dx,$$

привлекая неравенство Гронуолла к выше полученному, установим оценку

$$\int_0^1 \rho^2 dx \leq C_8(C_2, C_7, N, c, n, t^n) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau. \quad (2.20)$$

Умножим теперь (2.5) на $\theta_{is}^{(1,2)}(t)$ для $U_i^{(1)}$ и $U_i^{(2)}$ соответственно, просуммируем по $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, n$, вычтем второе равенство из первого, и проинтегрируем по t , получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} U_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_j}{\partial x} dx d\tau \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^t \int_0^1 \left(P(\rho^{(1)}) - P(\rho^{(2)}) \right) \frac{\partial U_i}{\partial x} dx d\tau - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} dx d\tau \\ &- \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho^{(1)} v U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} dx d\tau - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho v^{(2)} U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Благодаря (2.8) и положительной определенности $\mathbf{N}$, слагаемые в левой части равенства (2.21) допускают следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} U_i^2 dx \geq \frac{1}{2C_2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx, \\ & \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_j}{\partial x} dx d\tau \geq C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Привлекая теорему Лагранжа о конечных приращениях, с помощью неравенства Коши и оценки (2.20), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^t \int_0^1 \left(P(\rho^{(1)}) - P(\rho^{(2)}) \right) \frac{\partial U_i}{\partial x} dx d\tau \leq \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \\ &+ C_9 \left(C_1, C_8, \max_{[C_2^{-1}, C_2]} P', N, t^n \right) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Далее, используя неравенство

$$U_i^2 \leq 2n \int_0^1 U_i^2 dx,$$

вновь привлекая неравенство Коши, с помощью оценок (2.15) и (2.20) установим, что

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} dx d\tau \leq \frac{1}{4C_2} \sup_{\tau \in [0, t]} \sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx \\ & + C_{10}(C_2, C_6, C_8, N, n, t^n) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Наконец, используя неравенство Коши, получаем следующие оценки для последних двух слагаемых в (2.21):

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho^{(1)} v U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} dx d\tau \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 U_i^2 dx d\tau \\ & + C_{11}(C_2, N, c, n) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau, \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho v^{(2)} U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} dx d\tau \leq C_{12}(N, c, n) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 U_i^2 dx d\tau \\ & + C_{13}(C_8, N, t^n) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, из равенства (2.21), выше установленных оценок и неравенства Гронуолла, получаем, что

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx \leq C_{14} \left(C_2, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, t^n \right) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau,$$

откуда непосредственно следует нужное неравенство

$$\|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}\|_{(C[0, t^n])^{nN}} \leq C_{15}(C_{14}, N, n, t^n) \|\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}\|_{(C[0, t^n])^{nN}},$$

тем самым обосновывая непрерывность оператора $\mathbf{L}$. Поскольку выполнены все условия теоремы Шаудера, существует неподвижная точка $\sigma \in V$ оператора $\mathbf{L}$, которая вместе с функцией ρ определяет решение приближенной задачи (2.1)-(2.3). Лемма 2.1 доказана. $\square$

§ 3. Равномерные оценки галеркинских приближений

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует решение приближенной задачи (2.1)-(2.3) определенное на $(0, t^n)$. Несомненно $t^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому необходимо установить существование каждого приближения на $(0, t_0)$ для некоторого $t_0 \in (0, T)$ независимого от параметра приближения n . На самом деле, достаточно обосновать существование такого t_0 , для которого имеет место равномерная априорная оценка функциональных норм приближений в $Q_{t_0} = (0, t_0) \times (0, 1)$. Наличие такой априорной оценки, как хорошо известно, гарантирует существование приближенного решения на интервале ее действия.

Лемма 3.1. *В условиях теоремы 1.1 существует $t_0 \in (0, T)$, зависящее лишь от входных данных задачи (1.1)-(1.4), такое, что в предположении существования решения приближенной задачи (2.1)-(2.3) в области Q_{t_0} имеет место оценка*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left(\|u_i\|_{L^\infty(0, t_0; W^{1,2}(0,1))} + \|u_i\|_{L^2(0, t_0; W^{2,2}(0,1))} + \left\| \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_{t_0})} \right) \\ & + \|\rho\|_{L^\infty(0, t_0; W^{1,2}(0,1))} + \left\| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0, t_0; L^2(0,1))} + \|1/\rho\|_{L^\infty(Q_{t_0})} \leq C_{16}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где константа C_{16} зависит лишь от t_0 и входных данных задачи (1.1)-(1.4), но не зависит от n .

Доказательство. Определим величины

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx d\tau, \\ \xi(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Из равенства $\int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x} dx = 0$ следует существование $c_i(t) \in [0, 1]$ такого, что $\frac{\partial u_i}{\partial x}(t, c_i(t)) = 0$. Но тогда, используя неравенство Коши, получим, что

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right| = \left| \int_{c_i(t)}^x \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} dy \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2},$$

и, следовательно, с учетом (2.7), приходим к оценке

$$C_{17}^{-1}e^{-C_{17}\eta(t)} \leq \rho(t, x) \leq C_{17}e^{C_{17}\eta(t)}, \quad (3.2)$$

где $C_{17} = C_{17}\left(\sup_{[0,1]} \rho_0, \inf_{[0,1]} \rho_0, N, T\right)$.

Поделим первое уравнение в (2.1) на ρ^2 и продифференцируем по x , получим соотношение

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \rho v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

которое умножим на $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right)$, проинтегрируем по x , и, снова привлекая (2.1), установим следующее равенство:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)^2 dx = 2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx.$$

Интегрируя его по t и применяя неравенство Коши, получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)^2 dx &\leq \left\| \rho'_0 / \rho_0^{3/2} \right\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)^2 dx d\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx d\tau, \end{aligned}$$

откуда, с учетом (3.2) и неравенства Гронуолла, следует

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx \leq C_{18} e^{C_{18}\eta(t)}, \quad (3.3)$$

где $C_{18} = C_{18}\left(C_{17}, \left\| \rho'_0 / \rho_0^{3/2} \right\|_{L^2(0,1)}, N, T\right)$.

Далее, умножая (2.2) на $\sigma'_{is}(t) + \pi^2 s^2 \sigma_{is}(t)$, суммируя по $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, n$, привлекая (2.1) и симметричность матрицы $\mathbf{N}$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} dx \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx \\ &= - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial t} dx + \sum_{i=1}^N \int_0^1 \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} dx \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_0^1 2\rho v \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x} dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Благодаря положительной определенности $\mathbf{N}$, левая часть (3.4) допускает следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} dx \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx \right) \geq C_1 \eta'(t) + \xi'(t). \end{aligned}$$

С помощью вспомогательной оценки

$$\left(\sup_{(0,1)} |v| \right)^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \leq 2NC_{17} \xi(t) e^{C_{17}\eta(t)}$$

и неравенства Коши, оценим следующие слагаемые:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x} dx & \leq \frac{C_1}{10} \eta'(t) + C_{19}(C_1, C_{17}, N) \xi^2(t) e^{C_{19}\eta(t)}, \\ \sum_{i=1}^N \int_0^1 2\rho v \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} dx & \leq \frac{C_1}{10} \eta'(t) + C_{20}(C_1, C_{17}, N) \xi^2(t) e^{C_{20}\eta(t)}. \end{aligned}$$

Привлекая оценку

$$\left(\sup_{(0,1)} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right| \right)^2 \leq 2 \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

с помощью неравенства Коши, (3.2) и (3.3) установим, что

$$- \sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x} dx \leq \frac{C_1}{10} \eta'(t) + C_{21}(C_1, C_{17}, C_{18}, N) \xi(t) e^{C_{21}\eta(t)}.$$

Введем монотонную функцию $\mathcal{P}(x) = 1 + \left(\max_{s \in [x^{-1}, x]} P'(s) \right)^2$. Тогда оставшиеся слагаемые в (3.4), вновь привлекая неравенство Коши, (3.2) и (3.3), оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial t} dx \leq \frac{C_1}{10} \eta'(t) \\ & + C_{22}(C_1, C_{17}, C_{18}, N) e^{C_{22}\eta(t)} \mathcal{P}(C_{17} e^{C_{17}\eta(t)}), \\ & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} dx \leq \frac{C_1}{10} \eta'(t) \\ & + C_{23}(C_1, C_{18}, N) e^{C_{23}\eta(t)} \mathcal{P}(C_{17} e^{C_{17}\eta(t)}). \end{aligned}$$

Обозначим $\zeta(t) = \frac{C_1}{2}\eta(t) + \xi(t)$. Тогда из выше установленных оценок, для постоянной $C_{24} = C_{24}(C_1, C_{17}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23})$, получим

$$\zeta'(t) \leq \mathcal{F}(\zeta(t)), \quad \text{где} \quad \mathcal{F}(\zeta(t)) = C_{24}e^{C_{24}\zeta(t)}\mathcal{P}\left(C_{24}e^{C_{24}\zeta(t)}\right). \quad (3.5)$$

Пусть $[0, t_0]$ есть промежуток существования решения следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \mathcal{F}(\varphi(t)), \\ \varphi(0) = \left(\|\rho_0\|_{L^\infty(0,1)} + N \max_{1 \leq i, j \leq N} |\nu_{ij}|\right) \sum_{i=1}^N \|u'_{0i}\|_{L^2(0,1)}^2 + 1. \end{cases}$$

Такое t_0 всегда существует за счет непрерывности $\mathcal{F}$, причем эта величина зависит лишь от входных данных задачи (1.1)-(1.4). Более того, в силу монотонности $\mathcal{F}$, (3.5) и неравенства $\zeta(0) < \varphi(0)$, справедливо неравенство $\zeta(t) \leq \varphi(t)$ для всех $t \in [0, t_0]$, и, в силу монотонности φ , получаем, что $\zeta(t) \leq \varphi(t_0)$. Но тогда оценка (3.1) является очевидным следствием полученного неравенства, (2.1), (3.2) и (3.3), где $C_{16} = C_{16}(C_1, C_{17}, C_{18}, N, t_0, \varphi(t_0))$. Лемма 3.1 доказана. $\square$

§ 4. Сходимость галеркинских приближений

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют решения $(\rho^n, u_1^n, \dots, u_N^n)$ задачи (2.1)-(2.3), определенные на $\bar{Q}_{t_0} = [0, t_0] \times [0, 1]$, для которых справедлива оценка (3.1). В силу этой оценки существует подпоследовательность (которую переобозначим как исходную; далее, любой необходимый переход к подпоследовательности понимается таким образом), для которой при $n \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned} \rho^n &\rightarrow \rho \quad * \text{—слабо в } L^\infty(0, t_0; W^{1,2}(0, 1)), \\ u_i^n &\rightarrow u_i \quad * \text{—слабо в } L^\infty(0, t_0; W^{1,2}(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N, \\ u_i^n &\rightarrow u_i \quad \text{слабо в } L^2(0, t_0; W^{2,2}(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Более того, свойства (1.5) выполнены для нашей последовательности в Q_{t_0} равномерно по n , поэтому, предельные функции попадают в соответствующие классы гладкости. Покажем, что набор функций $(\rho, u_1, \dots, u_N)$ является сильным решением задачи (1.1)-(1.4). Из равномерных оценок ρ^n, u_i^n в $L^\infty(0, t_0; W^{1,2}(0, 1))$ и $\frac{\partial \rho^n}{\partial t}, \frac{\partial u_i^n}{\partial t}$ в $L^2(Q_{t_0})$ получаем, по теореме Асколи-Арцела, сходимости

$$\rho^n \rightarrow \rho \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{сильно в } C([0, t_0]; L^2(0, 1)), \quad (4.1)$$

$$u_i^n \rightarrow u_i \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ сильно в } C([0, t_0]; L^2(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.2)$$

Из ограниченности u_i^n в $L^2(0, t_0; W^{2,2}(0, 1)) \cap L^\infty(0, t_0; W^{1,2}(0, 1))$, $\frac{\partial u_i^n}{\partial t}$ в $L^2(Q_{t_0})$ следуют, по теореме Обена-Лионса (см., [29], с. 59), сходимости

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x} \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ сильно в } L^2(Q_{t_0}), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

С помощью (4.2) и (4.3) получаем

$$u_i^n \rightarrow u_i \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ сильно в } L^2(0, t_0; C[0, 1]), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Таким образом, предельные функции $\rho, u_i, i = 1, \dots, N$, удовлетворяют уравнению неразрывности (1.1) почти всюду в Q_{t_0} , в котором $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$,

начальным условиям (1.3) — для почти всех $x \in (0, 1)$ и граничным условиям (1.4) — для почти всех $t \in (0, t_0)$.

Далее, из ограниченности $\frac{\partial u_i^n}{\partial t}$ в $L^2(Q_{t_0})$ следует слабая сходимость $\frac{\partial u_i^n}{\partial t}$ к $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ в $L^2(Q_{t_0})$, что вместе с (4.1) и ограниченностью $\rho^n \frac{\partial u_i^n}{\partial t}$ в $L^2(Q_{t_0})$ влечет

$$\rho^n \frac{\partial u_i^n}{\partial t} \rightarrow \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ слабо в } L^2(Q_{t_0}), \quad i = 1, \dots, N.$$

В свою очередь, из (4.1) и (4.3) следует, что

$$\rho^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \rightarrow \rho \frac{\partial u_i}{\partial x} \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ сильно в } L^2(0, t_0; L^1(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N,$$

откуда, с помощью (4.4), получаем для всех $i, j = 1, \dots, N$ сходимости

$$\rho^n u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \rightarrow \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ сильно в } L^1(Q_{t_0}). \quad (4.5)$$

В итоге, из (2.2) следует, что для любых функций вида

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^M \Psi_{ik}(t) \sin(\pi k x), \quad M \leq n, \quad (4.6)$$

$$\Psi_{is} \in C[0, t_0], \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, M,$$

выполнены равенства

$$\int_0^{t_0} \int_0^1 \left(\rho^n \frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \rho^n v^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial P(\rho^n)}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j^n}{\partial x^2} \right) \varphi_i dx dt = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

в которых, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, в силу полученных выше сходимостей и всюду плотности функций вида (4.6) в $L^2(Q_{t_0})$, получаем справедливость уравнений баланса импульсов (1.2) для предельных функций ρ , u_i , $i = 1, \dots, N$ почти всюду в Q_{t_0} .

§ 5. Глобальное существование решения начально-краевой задачи

С учетом выше доказанных лемм и предельного перехода, имеет место локальное по времени существование сильного решения задачи (1.1)-(1.4). Для того, чтобы установить существование решения в целом по времени, необходимо получить для него равномерные по t_0 априорные оценки. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.1. *В условиях теоремы 1.1 существует положительная постоянная C_{25} , зависящая лишь от входных данных задачи (1.1)-(1.4), но независящая от t_0 , такая, что имеет место априорная оценка*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left(\|u_i\|_{L^\infty(0,T;W^{1,2}(0,1))} + \|u_i\|_{L^2(0,T;W^{2,2}(0,1))} + \left\| \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\|_{L^2(Q_T)} \right) \\ & + \|\rho\|_{L^\infty(0,T;W^{1,2}(0,1))} + \left\| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \|1/\rho\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_{25}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Доказательство. Перейдем к массовым лагранжевым координатам. В качестве независимых переменных возьмем пару (t, y) , где $y(t, x) = \int_0^x \rho(t, s) ds$. Ввиду (2.7), якобиан перехода $\frac{\partial(t, y)}{\partial(t, x)} = \rho$ невырожден, более того, $x \mapsto y(t, x)$ — монотонно возрастающая функция для всех $t \in [0, T]$. Поэтому, отображение $(t, x) \mapsto (t, y)$ осуществляет биекцию между областью Q_T и прямоугольником $\Pi_T = (0, T) \times (0, d)$, где $d = \int_0^1 \rho_0 dx$. Введем обозначение $\tilde{f}(t, y) = f(t, x(t, y))$ и посчитаем частные производные первого порядка в новых координатах:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} - \tilde{\rho} v \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}.$$

Тогда задача (1.1)-(1.4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\rho}^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad \tilde{v} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{u}_j, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \alpha_i \frac{\partial P(\tilde{\rho})}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.3)$$

$$\tilde{\rho}|_{t=0} = \tilde{\rho}_0(y), \quad \tilde{u}_i|_{t=0} = \tilde{u}_{0i}(y), \quad y \in [0, d], \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.4)$$

$$\tilde{u}_i|_{y=0} = \tilde{u}_i|_{y=d} = 0, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.5)$$

Приступим к выводу априорных оценок. Рассмотрим функцию

$$G(\rho) = \int_d^\rho \int_d^z \frac{P'(s)}{s} ds dz \geq 0.$$

Поскольку $\rho G'(\rho) - G(\rho) = P(\rho) - P(d)$, несложно проверить, что $G(\rho)$ удовлетворяет ренормализованному уравнению неразрывности

$$\frac{\partial G(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (G(\rho)v) + (P(\rho) - P(d)) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (5.6)$$

Умножим уравнения (1.2) на u_i , проинтегрируем по x и просуммируем по i , получим равенство

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_i v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i u_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} \right) dx = \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} dx. \quad (5.7)$$

В силу (1.1), (1.4) и (5.6), для слагаемых уравнения (5.7) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) u_i dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i^2 dx, \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 u_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} dx &= - \int_0^1 P(\rho) \frac{\partial v}{\partial x} dx = \frac{d}{dt} \int_0^1 G(\rho) dx, \\ - \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} dx &= \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx \geq C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Таким образом, с помощью этих соотношений, из равенства (5.7), после интегрирования по t , получаем первую априорную оценку

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i^2 dx + \int_0^1 G(\rho) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx dt \leq C_{26}, \quad (5.8)$$

где $C_{26} = C_{26}(C_1, \{\|\rho_0 u_{0i}^2\|_{L^1(0,1)}\}, \|G(\rho_0)\|_{L^1(0,1)})$. Заметим, что из (5.8) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^N \int_0^T \left(\sup_{x \in [0,1]} |u_i| \right)^2 dt \leq C_{26}. \quad (5.9)$$

Уравнения (5.3) перепишем в векторной форме и умножим результат на обратную матрицу $\mathbf{N}^{-1} = \{\tilde{\nu}_{ij}\}$, затем умножим на α_i , и просуммируем по i , получим

$$\sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + \tilde{K} \frac{\partial P(\tilde{\rho})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right), \quad (5.10)$$

где $\tilde{K} = \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \alpha_j > 0$. Из уравнения (5.2) выразим $\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial t}$,

подставим в (5.10), умножим результат на $\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y}$ и проинтегрируем по y , получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^d \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy + \tilde{K} \int_0^d \tilde{\rho} P'(\tilde{\rho}) \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy \\ & = - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Правая часть данного равенства, с учетом (5.2), допускает преобразование

$$\begin{aligned} & - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} dy = - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \frac{d}{dt} \int_0^d \tilde{u}_j \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} dy \\ & + \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} dy, \end{aligned}$$

с помощью которого из (5.11), после интегрирования по t , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^d \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy + \tilde{K} \int_0^t \int_0^d \tilde{\rho} P'(\tilde{\rho}) \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy d\tau \\ & = - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \tilde{u}_j \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} dy + \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \tilde{u}_{0j} \frac{d \ln \tilde{\rho}_0}{dy} dy \\ & + \frac{1}{2} \int_0^d \left(\frac{d \ln \tilde{\rho}_0}{dy} \right)^2 dy + \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^t \int_0^d \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} dy d\tau. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Имеем, благодаря неравенству Коши, оценки

$$\begin{aligned} & - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \tilde{u}_j \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} dy \leq \frac{1}{4} \int_0^d \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy \\ & + C_{27}(\{\tilde{\nu}_{ij}\}, N) \sum_{i=1}^N \int_0^d \tilde{u}_i^2 dy, \\ & \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^t \int_0^d \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} dy d\tau \leq C_{28}(\{\tilde{\nu}_{ij}\}, N) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^d \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} \right)^2 dy d\tau, \end{aligned}$$

с помощью которых, пользуясь (5.8) и (5.9) (при необходимости перепи-
санных в лагранжевых координатах), из (5.12) получаем неравенство

$$\int_0^d \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy + \int_0^T \int_0^d \tilde{\rho} P'(\tilde{\rho}) \left(\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy dt \leq C_{29}. \quad (5.13)$$

где $C_{29} = C_{29}(C_{26}, C_{27}, C_{28}, \inf_{[0,d]} \tilde{\rho}_0, \|\tilde{\rho}_0\|_{W^{1,2}(0,d)}, \{\|\tilde{u}_{0i}\|_{W^{1,2}(0,d)}\}, \{\tilde{\nu}_{ij}\}, \tilde{K}, N)$.

Далее, из (5.2) и (5.5) следует, что

$$\frac{d}{dt} \int_0^d \left(\frac{1}{\tilde{\rho}} \right) dy = 0,$$

поэтому, для каждого $t \in [0, T]$ найдется $y^*(t) \in [0, d]$, для которого вы-
полнено

$$\tilde{\rho}(t, y^*(t)) = d. \quad (5.14)$$

Используя теперь представление

$$\ln \tilde{\rho}(t, y) = \ln \tilde{\rho}(t, y^*(t)) + \int_{y^*(t)}^y \frac{\partial \ln \tilde{\rho}(t, s)}{\partial s} ds,$$

с учетом (5.13), (5.14) и неравенства Гельдера, получим

$$|\ln \tilde{\rho}(t, y)| \leq |\ln d| + \sqrt{d} \left\| \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right\|_{L^2(0,d)},$$

откуда непосредственно следует существование постоянной $C_{30} = C_{30}(C_{29}, d)$,
такой что

$$C_{30}^{-1} \leq \tilde{\rho} \leq C_{30},$$

а значит

$$C_{30}^{-1} \leq \rho \leq C_{30}. \quad (5.15)$$

С помощью (5.13) и (5.15) несложно теперь получить оценку

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx \leq C_{31}(C_{29}, C_{30}). \quad (5.16)$$

Введем в рассмотрение величину

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial \tau} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho} \left(\sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx d\tau. \end{aligned}$$

Возведем уравнения (1.2) в квадрат, поделим на ρ и просуммируем по i , получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\rho} \left(\sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \\ & = \sum_{i=1}^N \rho \left(v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\alpha_i}{\rho} \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

В силу симметричности $\mathbf{N}$, из соотношения (5.17), после интегрирования по x , следует, что

$$\theta'(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\alpha_i}{\rho} \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} \right)^2 dx,$$

откуда, вновь привлекая неравенство Коши, имеем

$$\theta'(t) \leq \sum_{i=1}^N \int_0^1 2\rho v^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 (P'(\rho))^2 dx,$$

и следовательно, с учетом (5.15) и (5.16), устанавливаем

$$\theta'(t) \leq \frac{2C_{30}N}{C_1} \left(\sum_{i=1}^N \|u_i\|_{L^\infty(0,1)}^2 \right) \theta(t) + 2NC_{30}C_{31} \left(\max_{[C_{30}^{-1}, C_{30}]} P' \right)^2.$$

Применяя неравенство Гронуолла, из полученного выше соотношения получаем оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ & + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \leq C_{32}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где $C_{32} = C_{32}(C_1, C_{26}, C_{30}, C_{31}, \max_{[C_{30}^{-1}, C_{30}]} P', \{\|u'_{0i}\|_{L^2(0,1)}\}, \mathbf{N}, N, T)$. Наконец, из уравнения (1.1) и оценок (5.15), (5.16) и (5.18) несложно получить, что

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 dx \leq C_{33}(C_{30}, C_{31}, C_{32}, N).$$

В итоге, наличие вышеустановленной оценки, вместе с (5.15), (5.16) и (5.18), гарантирует существование константы $C_{25} = C_{25}(C_{30}, C_{31}, C_{32}, C_{33}, N, T)$, зависящей лишь от входных данных задачи (1.1)-(1.4), но не от малого параметра t_0 , для которой имеет место априорная оценка (5.1). Лемма 5.1 доказана. $\square$

§ 6. Единственность решения

Ввиду обоснованного локального существования решения начально-краевой задачи (1.1)-(1.4) и доказанной выше априорной оценки, данное решение существует в целом по времени. Рассмотрим вопрос о единственности этого решения.

Лемма 6.1. *Сильное решение начально-краевой задачи (1.1)-(1.4) единственно.*

Доказательство. Пусть $(\rho^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_N^{(1)})$ и $(\rho^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots, u_N^{(2)})$ — два решения начально-краевой задачи (1.1)-(1.4). Положим $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, N$, $v^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j^{(1,2)}$, $v = v^{(1)} - v^{(2)}$, $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$. Из уравнений (1.1) и (1.3) получим равенства

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^{(1)})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho^{(2)} v)}{\partial x} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0.$$

Умножая первое равенство на 2ρ и интегрируя по x , приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \rho^2 dx = - \int_0^1 \left(\rho^2 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + 2\rho^{(2)} \rho \frac{\partial v}{\partial x} + 2\rho v \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right) dx. \quad (6.1)$$

Слагаемые в правой части (6.1) допускают следующие оценки:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \rho^2 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} dx &\leq \left(\sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,1)} \right) \int_0^1 \rho^2 dx, \\ - 2 \int_0^1 \rho^{(2)} \rho \frac{\partial v}{\partial x} dx &\leq \|\rho^{(2)}\|_{L^\infty(Q_T)}^2 \int_0^1 \rho^2 dx + N \sum_{j=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx, \\ - 2 \int_0^1 \rho v \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} dx &\leq \int_0^1 \rho^2 dx + \left\| \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 \|v\|_{L^\infty(0,1)}^2 \\ &\leq \int_0^1 \rho^2 dx + N \left\| \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 \sum_{j=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\rho^{(2)}$ и $u_i^{(1)}$ удовлетворяют включениям (1.5), справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho^2 dx &\leq B_1 \left(\left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,1)} \right\}, \|\rho^{(2)}\|_{L^\infty(Q_T)} \right) \int_0^1 \rho^2 dx \\ &+ C_{34} \left(\left\| \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}, N \right) \sum_{j=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

где $B_1 \in L^2(0, T)$. Поэтому, привлекая неравенство Гронуолла, получаем оценку

$$\int_0^1 \rho^2 dx \leq C_{35}(\|B_1\|_{L^1(0,T)}, C_{34}) \sum_{j=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx d\tau. \quad (6.2)$$

Далее, из уравнений (1.2) и краевых условий (1.4) следует равенство

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} u_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx d\tau \right) \\ &= \int_0^1 \left(P(\rho^{(1)}) - P(\rho^{(2)}) \right) \frac{\partial v}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} dx \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} v u_i \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v^{(2)} u_i \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} dx. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Слагаемые в правой части (6.3), ввиду неравенства Коши, допускают следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(P(\rho^{(1)}) - P(\rho^{(2)}) \right) \frac{\partial v}{\partial x} dx \leq \frac{C_1}{4} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \\ & + C_{36} \left(C_1, \max_{[C_{25}^{-1}, C_{25}]} P', N \right) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^2 dx, \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} dx \leq \frac{C_1}{4} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \\ & + B_2 \left(C_1, \left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right\|_{L^2(0,1)} \right\} \right) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^2 dx, \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} v u_i \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} dx \leq B_3 \left(\left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,1)} \right\}, N \right) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} u_i^2 dx, \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v^{(2)} u_i \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} dx \leq C_{37} \left(\left\{ \|u_i^{(2)}\|_{L^\infty(Q_T)} \right\}, N \right) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^2 dx \\ & + B_4 \left(\left\| \frac{1}{\rho^{(1)}} \right\|_{L^\infty(Q_T)}, \left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,1)} \right\} \right) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} u_i^2 dx, \end{aligned}$$

где $B_2, B_4 \in L^1(0, T)$, $B_3 \in L^2(0, T)$. Поэтому, благодаря ранее доказанному соотношению (6.2) и положительной определенности $\mathbf{N}$, из (6.3) следует

неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} u_i^2 dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \\ & \leq \int_0^t B_5(C_1, C_{35}, C_{36}, C_{37}, B_2, B_3, B_4, N) \left(\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} u_i^2 dx \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^N \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx ds \right) d\tau, \end{aligned}$$

где $B_5 \in L^1(0, T)$. Отсюда, используя неравенство Гронуолла, получаем, что $\rho = 0$, $u_i = 0$, $i = 1, \dots, N$ в $L^2(Q_T)$. Таким образом, любые два решения начально-краевой задачи (1.1)-(1.4) совпадают почти всюду в Q_T . Эти рассуждения завершают доказательство леммы 6.1 и теоремы 1.1. $\square$

§ 7. Заключение

Для системы дифференциальных уравнений баротропной динамики сжимаемых вязких многокомпонентных сред с недиагональной, симметричной и положительно определенной матрицей вязкостей поставлена начально-краевая задача и проведено обоснование существования и единственности решения данной задачи.

Список литературы

1. Нигматулин Р. И. *Динамика многофазных сред*. М.: Наука, 1987. Т. 1.
2. Rajagopal K. R., Tao L. *Mechanics of mixtures*. Singapore: World Scientific, 1995.
3. Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А. Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory // *Сибирские электронные математические известия*. 2017. Т. 14. С. 388–397.
4. Kirwan A. D., Massoudi M. The heat flux vector(s) in a two component fluid mixture // *Fluids*. 2020. V. 5, № 2. Article number 77.
5. Lee R. T., Yang K. T., Chiou Y. C. A novel model for a mixed-film lubrication with oil-in-water emulsions // *Tribology International*. 2013. V. 66. P. 241–248.

6. Malek J., Rajagopal K. R. A thermodynamic framework for a mixture of two liquids // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2008. V. 9, № 4. P. 1649–1660.
7. Atkin R. J., Craine R. E. Continuum theories of mixtures: applications // *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1976. V. 17, № 2. P. 153–207.
8. Muller I. A thermodynamic theory of mixtures of fluids // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1968. V. 28. P. 1–39.
9. Вайгант В. А. О задаче Коши для системы уравнений вязкого газа // *Динамика сплошной среды*. 1992. Т. 102. С. 3–10.
10. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*. Новосибирск: Наука, 1983.
11. Вайгант В. А. Неоднородные граничные задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа // *Динамика сплошной среды*. 1990. Т. 97. С. 3–21.
12. Вайгант В. А., Папин А. А. Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений баротропного газа с вязкостью, зависящей от плотности // *Динамика сплошной среды*. 1987. Т. 79. С. 3–9.
13. Белов С. Я. О задаче протекания для системы уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа // *Динамика сплошной среды*. 1982. Т. 56. С. 22–43.
14. Кажихов А. В. О задаче Коши для уравнений вязкого газа // *Сибирский математический журнал*. 1982. Т. 23. С. 60–64.
15. Шелухин В. В. Периодические течения вязкого газа // *Динамика сплошной среды*. 1979. Т. 42. С. 80–102.
16. Кажихов А. В. О глобальной разрешимости одномерных краевых задач для уравнений вязкого теплопроводного газа // *Динамика сплошной среды*. 1976. Т. 24. С. 45–61.
17. Кажихов А. В. Корректность “в целом” смешанных краевых задач для модельной системы уравнений вязкого газа // *Динамика сплошной среды*. 1975. Т. 21. С. 18–47.
18. Ноговищева В. Ю., Прокудин Д. А. Существование и единственность решения начально-краевой задачи для одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой смеси // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2025. Т. 71, № 3. С. 395–416.

19. Прокудин Д. А. Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для модельной системы уравнений политропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей // *Сибирские электронные математические известия*. 2017. Т. 14. С. 568–585.
20. Prokudin D. A. Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V. 894. Article number 012076.
21. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Asymptotic behavior of the solution to the initial-boundary value problem for one-dimensional motions of a barotropic compressible viscous multifluid // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. V. 45. P. 1463–1471.
22. Прокудин Д. А. Стабилизация решения начально-краевой задачи для одномерных изотермических уравнений вязких сжимаемых многокомпонентных сред // *Известия Алтайского государственного университета*. 2023. Т. 4. С. 73–77.
23. Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А. Глобальная однозначная разрешимость начально-краевой задачи для одномерных баротропных уравнений динамики бинарных смесей вязких сжимаемых жидкостей // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2021. Т. 24, № 1. С. 32–47.
24. Прокудин Д. А. О стабилизации решения начально-краевой задачи для уравнений динамики вязких сжимаемых многокомпонентных сред // *Сибирские электронные математические известия*. 2021. Т. 18, № 2. С. 1278–1285.
25. Папин А. А. Об единственности решений начально-краевой задачи для системы теплопроводной двухфазной смеси // *Математические заметки*. 2010. Т. 87, № 4. С. 636–640.
26. Петров А. Н. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // *Динамика сплошной среды*. 1982. Т. 56. С. 105–121.
27. Кажихов А. В., Петров А. Н. Корректность начально-краевой задачи для модельной системы уравнений многокомпонентной смеси // *Динамика сплошной среды*. 1978. Т. 35. С. 61–73.

28. DiPerna R. J., Lions P. L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // *Inventiones Mathematicae*. 1989. V. 98. P. 511–547.
29. Novotny A., Straskraba I. *Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow*. Oxford: Oxford University Press, 2004.

References

1. Nigmatulin R. I. *Dynamics of Multiphase Media*. New York: Hemisphere, 1990. V. 1.
2. Rajagopal K. R., Tao L. *Mechanics of Mixtures*. Singapore: World Scientific, 1995.
3. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2017. V. 14. P. 388–397.
4. Kirwan A. D., Massoudi M. The heat flux vector(s) in a two component fluid mixture // *Fluids*. 2020. V. 5, № 2. Article number 77.
5. Lee R. T., Yang K. T., Chiou Y. C. A novel model for a mixed-film lubrication with oil-in-water emulsions // *Tribology International*. 2013. V. 66. P. 241–248.
6. Malek J., Rajagopal K. R. A thermodynamic framework for a mixture of two liquids // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2008. V. 9, № 4. P. 1649–1660.
7. Atkin R. J., Craine R. E. Continuum theories of mixtures: applications // *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1976. V. 17, № 2. P. 153–207.
8. Muller I. A thermodynamic theory of mixtures of fluids // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1968. V. 28. P. 1–39.
9. Vaigant V. A. On the Cauchy problem for the system of equations of a viscous gas // *Dynamics of Continuous Media*. 1992. V. 102. P. 3–10.
10. Antontsev S. N., Kazhikhov A. V., Monakhov V. N. *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*. Amsterdam: North-Holland, 1990.
11. Vaigant V. A. Inhomogeneous boundary value problems for equations of a viscous heat-conducting gas // *Dynamics of Continuous Media*. 1990. V. 97. P. 3–21.

12. Vaigant V.A., Papin A.A. Solvability of the initial-boundary value problem for the equations of a barotropic gas with density-dependent viscosity // *Dynamics of Continuous Media*. 1987. V. 79. P. 3–9.
13. Belov S. Ya. On the flow problem for the system of equations of one-dimensional motion of a viscous heat-conducting gas // *Dynamics of Continuous Media*. 1982. V. 56. P. 22–43.
14. Kazhikhov A. V. Cauchy problem for viscous gas equations // *Siberian Mathematical Journal*. 1982. V. 23. P. 44–49.
15. Shelukhin V. V. Periodic flows of a viscous gas // *Dynamics of Continuous Media*. 1979. V. 42. P. 80–102.
16. Kazhikhov A. V. On global solvability of one-dimensional boundary value problems for the equations of a viscous heat-conducting gas // *Dynamics of Continuous Media*. 1976. V. 24. P. 45–61.
17. Kazhikhov A. V. Well-posedness “in the large” of mixed boundary value problems for a model system of equations of a viscous gas // *Dynamics of Continuous Media*. 1975. V. 21. P. 18–47.
18. Nogovishcheva V. Yu., Prokudin D. A. Existence and uniqueness of a solution to the initial-boundary value problem for one-dimensional equations of dynamics of a compressible viscous mixture // *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*. 2025. V. 71, № 3. P. 395–416.
19. Prokudin D. A. On the unique solvability of the initial-boundary value problem for a model system of equations of polytropic motion of a mixture of viscous compressible fluids // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2017. V. 14. P. 568–585.
20. Prokudin D. A. Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V. 894. Article number 012076.
21. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Asymptotic behavior of the solution to the initial-boundary value problem for one-dimensional motions of a barotropic compressible viscous multifluid // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. V. 45. P. 1463–1471.
22. Prokudin D. A. Stabilization of the solution to the initial-boundary value problem for one-dimensional isothermal equations of viscous compressible

- multicomponent media // *Izvestiya of Altai State University*. 2023. V. 4. P. 73–77.
23. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Global unique solvability of an initial-boundary value problem for the one-dimensional barotropic equations of binary mixtures of viscous compressible fluids // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2021. V. 15. P. 50–61.
24. Prokudin D. A. On stabilization of the solution to the initial-boundary value problem for equations of dynamics of viscous compressible multicomponent media // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2021. V. 18, № 2. P. 1278–1285.
25. Papin A. A. On the uniqueness of the solutions of an initial boundary-value problem for the system of a heat-conducting two-phase mixture // *Mathematical Notes*. 2010. V. 87, № 4. P. 594–598.
26. Petrov A. N. Well-posedness of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of interpenetrating motion of perfect gases // *Dynamics of Continuous Media*. 1982. V. 56. P. 105–121.
27. Kazhikhov A. V., Petrov A. N. Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture // *Dynamics of Continuous Media*. 1978. V. 35. P. 61–73.
28. DiPerna R. J., Lions P. L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // *Inventiones Mathematicae*. 1989. V. 98. P. 511–547.
29. Novotny A., Straskraba I. *Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow*. Oxford: Oxford University Press, 2004.

Информация об авторах

Владимир Александрович Макаров, студент

Дмитрий Алексеевич Прокудин, доктор физико-математических наук, доцент

SPIN 6255-2772 AuthorID: 559870

Scopus Author ID 55540573300

Author Information

Vladimir A. Makarov, Student

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)

Математические труды, 2026, Том 29, № 3, С. 192-225

Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 3, P. 192-225

Dmitrii A. Prokudin, Doctor of Mathematics, Associate Professor

SPIN 6255-2772 AuthorID: 559870

Scopus Author ID 55540573300

*Статья поступила в редакцию 07.07.2026;
одобрена после рецензирования 28.07.2026; принята к публикации
06.08.2026*

*The article was submitted 07.07.2026;
approved after reviewing 28.07.2026; accepted for publication 06.08.2026*